

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Простейшие неопределенные интегралы

Найдите следующие интегралы.

1. $\int \frac{\sqrt{x} + 1}{x} dx.$

2. $\int (x^3 + 1)^2 x^2 dx.$

3. $\int \frac{3 - x^2}{3 + x^2} dx.$

4. $\int (3 - x^2)^3 dx.$

5. $\int \frac{dx}{(2 + 3x)^{20}}.$

6. $\int 3^x \cdot 5^x dx.$

7. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}} dx.$

8. $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx.$

9. $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} dx.$

10. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx.$

11. $\int \frac{3x + 2}{2x + 3} dx.$

12. $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx.$

13. $\int \operatorname{th}^2 x dx.$

14. $\int \operatorname{sh} 2x dx.$

15. $\int \operatorname{ch} (2x + 3) dx.$

16. $\int (2^x + 3^x)^2 dx.$

17. $\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx.$

18. $\int (2x-3)^{10} dx.$

19. $\int \sqrt{1+\sin 2x} dx.$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}} dx.$

21. $\int \frac{dx}{2+3x^2}.$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}.$

23. $\int \frac{dx}{\sin^2(2x+\pi/4)}.$

24. $\int \frac{dx}{1+\cos x}.$

25. $\int \frac{dx}{1+\sin x}.$

Метод замены переменной

Выделяя дифференциал новой переменной, найдите следующие интегралы.

26. $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx.$

27. $\int \sin(2x+3) dx.$

28. $\int \frac{x dx}{4+x^4}.$

29. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$

$$30. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}.$$

$$31. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$32. \int \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}}.$$

$$33. \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$$

$$34. \int x e^{-x^2} dx.$$

$$35. \int \frac{\ln^2 x}{x} dx.$$

$$36. \int \frac{dx}{x(2+\ln x)}.$$

$$37. \int \sqrt[9]{1+27x} dx.$$

$$38. \int \sqrt[3]{\frac{\ln x}{x^3}} dx.$$

$$39. \int \sin^3 x \cos x dx.$$

$$40. \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx.$$

$$41. \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos 2x}}.$$

$$42. \int \frac{dx}{\sin x}.$$

$$43. \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}.$$

$$44. \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$$

$$45. \int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$$

Используя различные подстановки, найдите следующие интегралы.

$$46. \int x^3 (1-5x^2)^{10} dx.$$

$$47. \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$48. \int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx.$$

$$49. \int \frac{dx}{e^{x/2} + e^x}.$$

$$50. \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$$

$$51. \int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{dx}{1+x}.$$

$$52. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

$$53. \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx \text{ (Указание: } x = a \cos 2t \text{)}.$$

$$54. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

$$55. \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx \text{ (Указание: } x = a/\cos 2t \text{)}.$$

$$56. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

$$57. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Метод интегрирования по частям

Найдите следующие интегралы.

$$58. \int \ln x \, dx.$$

$$59. \int \sqrt{x} \ln^2 x \, dx.$$

$$60. \int x^3 e^{-x^2} \, dx.$$

$$61. \int x^2 \sin 2x \, dx.$$

$$62. \int \arcsin x \, dx.$$

$$63. \int \frac{\arcsin x}{x^2} \, dx.$$

$$64. \int \sin x \ln(\operatorname{tg} x) \, dx.$$

$$65. \int x (\operatorname{arctg} x)^2 \, dx.$$

$$66. \int \frac{x \ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}} \, dx.$$

$$67. \int e^x \sqrt{e^{2x} + 1} \, dx.$$

$$68. \int \cos(\ln x) \, dx.$$

$$69. \int e^{ax} \sin bx \, dx.$$

$$70. \int e^{2x} \sin^2 x \, dx.$$

Интегрирование рациональных функций

Найдите следующие интегралы.

$$71. \int \frac{2x + 3}{(x - 2)(x + 5)} \, dx.$$

72. $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx.$
73. $\int \left(\frac{x}{x^2 - 3x + 2} \right)^2 dx.$
74. $\int \frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$
75. $\int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)}.$
76. $\int \frac{dx}{x^3 + 1}.$
77. $\int \frac{dx}{x^4 - 1}.$
78. $\int \frac{dx}{x^4 + 1}.$
79. $\int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}.$
80. $\int \frac{x^2 dx}{x^4 + 3x^3 + 4,5x^2 + 3x + 1}.$
81. $\int \frac{dx}{x^6 + 1}.$
82. $\int \frac{x^3 dx}{(x - 1)^{100}}.$
83. $\int \frac{x^2 + x}{x^6 + 1} dx.$
84. $\int \frac{x^{11} dx}{x^8 + 3x^4 + 2}.$
85. $\int \frac{1 - x^7}{x(1 + x^7)} dx.$
86. $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx.$
87. $\int \frac{x^5 - x}{x^8 + 1} dx.$
88. $\int \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx.$

Интегрирование иррациональных функций

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Найдите следующие интегралы.

$$89. \int \frac{dx}{x(1 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$$

$$90. \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx.$$

$$91. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$$

$$92. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$$93. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + x + 1} \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

$$94. \int \frac{x}{x^3 dx} dx.$$

$$95. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 + 2x - x^2}}$$

$$96. \int \frac{x^{10} dx}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$97. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$98. \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$99. \int \frac{x^2 dx}{(4 - 2x + x^2)\sqrt{2 + 2x - x^2}}$$

$$100. \int \frac{dx}{(1 - x^4)\sqrt{1 + x^2}}$$

$$101. \int \frac{x dx}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - x - 1}}$$

$$102. \int \frac{(x+1) dx}{(x^2 + x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$$103. \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$$104. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}$$

$$105. \int \frac{dx}{[1 + \sqrt{x(1+x)}]^2}.$$

$$106. \int \frac{(x^2 - 1) dx}{(x^2 + 1)\sqrt{(x^4 + 1)}}.$$

$$107. \int \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^2 - 1)\sqrt{(x^4 + 1)}}.$$

Интегрирование тригонометрических функций

Найдите следующие интегралы.

$$108. \int \sin^6 x \, dx.$$

$$109. \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx.$$

$$110. \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} \, dx.$$

$$111. \int \operatorname{tg}^5 x \, dx.$$

$$112. \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}.$$

$$113. \int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}.$$

$$114. \int \cos x \cos 2x \cos 3x \, dx.$$

$$115. \int \sin^3 2x \cos^2 3x \, dx.$$

$$116. \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}.$$

$$117. \int \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x} \quad \text{при: а) } 0 < \varepsilon < 1; \text{ б) } \varepsilon > 1.$$

$$118. \int \frac{\sin^2 x \, dx}{1 + \sin^2 x}.$$

$$119. \int \frac{\sin x \, dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}.$$

$$120. \int \frac{dx}{\cos^6 x + \sin^6 x}.$$